مقارنة طرائق مختلفة لتقدير دالةالمعولية لتوزيع Burr-XII باستعمال المحاكاة.

عواطف رزوقي مزعل*

استلام البحث 20، كانون الثاني، 2012
قبول النشر 4، نيسان، 2012

الخلاصة:

يهتم هذا البحث بمسألة تقدير دالة المعولية لتوزيع Burr-XII بمعلمتين. يتم في هذا البحث تقديم طرائق مختلفة لتقدير معلمة الشكل β بأعتبار ان معلمة الشكل αمعلومة (1.5 , 1 , 0.5)ومن ثم دالة المعولية لذلك التوزيع وبحجم عينة مختلف (n =10, 20, 30, 50) وأيضا برنامج يوضح عمل تلك الطرائق، كما تم إجراء دراسة تجريبية لغرض المقارنة وإثبات كفاءة تلك الطرائق عملياً وذلك من خلال الاعتماد على مشاهدات مولدة من توزيع Burr-XII بمعلمتين وتمت المقارنة بالاعتماد على متوسط مربعات الخطاء الخاص بكل طريقة. وقد تبين أن طريقة مقدر Jackknife أكفاء من باقي المقدرات ولجميع إحجام العينات وقيم المعلمات المستعملة في الدراسة .

الكلمات المفتاحية: توزيع Burr-XII , دالة المعولية, طرائق تقدير, مقارنة الطرائق , المحاكاة .

المقدمة:

يعد توزيع (Burr – XII) من التوزيعات الاحصائية المستمرة والذي اكتشفه الباحث الاحصائي Burr عام 1942 وله اهمية تطبيقية كبيرة في دراسة المعولية وتحليلات وقت الفشل (اي الوقت المستغرق الى حين حصول الفشل في الماكنة او المعدات) ويمتلك دالة خطورة غير رتيبة (Non – monotone hazard function) وبذلك يكون انموذجا احصائيا كفوءا لوصف العديد من الظواهر , وقد بين الباحث Lewis , ان هناك توزيعات احصائية مهمة تمثل حالة خاصة من هذا التوزيع , مثل توزيع ويبل والتوزيع الاسي.[1] يمتلك التوزيع معلمتين احدهما تسمى معلمة الشكل (α Shape parameter) والثانية هي ايضا معلمة شكل ولكنها دائما تسلك سلوكβ , وسوف يتم في هذا البحث مقارنة العديد من الطرائق لتقدير معلمة الشكل β والمعولية وباعتبار ان معلمة الشكل α معلومة لان معادلة تقديرها معقدة جدا وتحتاج الى حسابات معقدة ومطولة , والطرائق هي الامكان الاعظم وطريقة العزوم والمربعات الصغرى وطريقة Jacknif, وتتم المقارنة بينهم بتطبيق تجارب المحاكاة واعتماد المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ(MSE) بوصفه معيارا للمقارنة.

أن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع Burr-XII بمعلمتين(α,β) تأخذ الشكل الاتي [2]:

$$f(t;\alpha,\beta)=\alpha\beta t^{\alpha-1}(1+t^{\alpha})^{-\beta-1}$$

$$t,\alpha,\beta>0 \qquad ....(1)$$

إذ إنَّ:

α و β :تمثلان معلمتي شكل (Shape Parameters)

أما دالة التوزيع التراكمية لتوزيع Burr-XII بمعلمتين(α,β) فهي:

$$F(t;\alpha,\beta)=\Pr[T\le t]$$

$$=\int_0^t f(u)du=1-(1+t^{\alpha})^{-\beta}$$

$$t,\alpha,\beta>0 \qquad ....(2)$$

دالة المعولية لهذا التوزيع ستكون:

$$R(t)=\int_t^{\infty} f(u;\alpha,\beta)du=(1+t^{\alpha})^{-\beta}$$

$$t,\alpha,\beta>0 \;.................(3)$$

دالة المخاطرة لهذا التوزيع ستكون كالآتي:

$$h(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\frac{\alpha\beta t^{\alpha-1}}{(1+t^{\alpha})}\;.................(4)$$

ونلاحظ من المعادلة رقم(4) ان معدل الفشل هو دالة للزمن.ولتقدير دالة المعولية كانت هنالك العديد من الطرائق منها طريقة الإمكان الأعظم وطريقة العزوم وطريقة المربعات الصغرى وغيرها،لذلك يتم في هذا البحث اجراء مقارنة تجريبية بالطرائق السابقة ووفقاً للمعيار الإحصائي متوسط مربعات الخطاء(MSE).

*الجامعة المستنصريه /كلية التربية/قسم الرياضيات

النظريـــة:

سوف نستعرض هنا الطرائق المختلفة لتقدير دالة المعولية،ولتقدير دالة المعولية لابد من تقدير معلمات توزيع Burr-XII للبيانات الكاملة وعلى افتراض ان معلمة الشكل (α) معلومة:

1- طريقة الإمكان الأعظم[3]: Maximum Likelihood Method(M.L.E)

تعد هذه الطريقة إحدى أهم طرائق التقديرالتي تهدف إلى جعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى،فإذا كانت لدينا عينة عشوائية $(t_1,t_2,...,t_n)$ تتوزع توزيع Burr-XII بمعلمتي شكل α و β، فان مقدر الإمكان الأعظم هو الذي يجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى ويمكن الحصول عليه باشتقاق لوغاريتم دالة الإمكان ومساواتها بالصفر،فإذا كانت(T) تتوزع توزيع Burr-XII بمعلمتين شكل(α,β) فان دالة الإمكان ستكون كالآتي:

$$L(t_1,t_2,...,t_n;\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n} f(t_i;\alpha,\beta)$$

$$=\alpha^n\beta^n\prod_{i=1}^{n} t_i^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{n}(1+t_i^{\alpha})^{-\beta-1} \quad ....(5)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين فان المعادلة السابقة تصبح كالأتي:

$$\log(L)=n\log(\alpha)+n\log(\beta)+$$

$$(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log(t_i)+(-\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\log(1+t_i^{\alpha})$$

.....(6)

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى β ومساواتهما بالصفر نحصل على المعادلة الاتية:

$$\frac{n}{\hat{\beta}}-\sum_{i=1}^{n}\log(1+t_i^{\alpha})=0 \quad ....(7)$$

وبذلك فان مقدر الامكان الاعظم سيكون:

$$\hat{\beta}_{mle}=\frac{n}{\sum_{i}^{n}\log(1+t_i)} \quad ....(8)$$

وبالاعتماد على خاصية الثبات التي تتمتع بها طريقة الامكان الاعظم فان مقدر دالة الامكان الاعظم لدالة المعولية سيكون كالأتي:

$$\hat{R}_{mle}(t)=(1+t^{\alpha})^{-\hat{\beta}_{mle}} \quad ....(9)$$

2- طريقة العزوم[1]: Method of Moments (m.o.m)

تتمايز طريقة العزوم بسهولتها فهي تعتمد على فرضية مساواة عزوم المجتمع μ_n مع عزوم العينة m_n وحل المعادلات لإيجاد تقديرات للمعلمات، إذ إن العزم (r^{th}) للتوزيع Burr-XII يمكن الحصول عليه وكما يأتي:

$$E(T^r)=\int_0^{\infty} t^r f(t;\alpha,\beta)dt=$$

$$\int_0^{\infty} t^r\alpha\beta t^{\alpha-1}(1+t^{\alpha})^{-\beta-1}dt$$

..............(10)

وباجراء التحويل الاتي $y=t^{\alpha}$ باستعمال اسلوب التحويل في المتغيرات العشوائية،فان المعادلة السابقة تصبح:

$$E(T^r)=\int_0^{\infty} t^r f(t;\alpha,\beta)dt$$

$$=\beta\int_0^{\infty} y^{r/\alpha}(1+y)^{-\beta-1}dy$$

.....(11)

وبالاستفادة من الشكل الاتي لدالة بيتا beta function :[7]

$$\beta(m,n)=\int_0^{\infty} y^{m-1}(1+y)^{-m-n}dy \quad ....(12)$$

فان العزم (r^{th}) للتوزيع Burr-XII يمكن الحصول عليه وكما يأتي:

$$E(t^r)=\beta\, beta(\frac{r}{\alpha}+1,\beta-\frac{r}{\alpha}) \quad ....(13)$$

ومن خلال مساواة عزم العينة الأول مع عزم المجتمع الأول ، نحصل على:

$$\bar{t}=\beta\frac{\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\left(\beta-\frac{1}{\alpha}\right)}{\left(\beta+1\right)} \quad ....(14)$$

وبحل المعادلة رقم (14)بالنسبة إلى β عددياً باستعمال طريقة نيوتن رافسن التكرارية يتم الحصول على مقدر العزوم ،فإذا كانت $\hat{\beta}_{m.o.m}$ هي مقدر طريقة العزوم للمعلمة β فان مقدر العزوم لدالة المعولية سوف يأخذ الصيغة الاتية [1]:

$$\hat{R}_{mom}(t)=(1+t^{\alpha})^{-\hat{\beta}_{mom}} \quad ....(15)$$

3- طريقة المربعات الصغرى)

Least Squares Method : l.s)

أن طريقة المربعات تتضمن تصغير مجموع مربعات الخطأ الاتي :

$$s(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2 \quad ......(16)$$

وبالاشتقاق الجزئي للدالة السابقة لكل من (a,b) ومساواة ناتج كل اشتقاق بالصفر يتم الحصول على المعادلتين الطبيعيتين، وبإجراء تبسيط رياضي يتم الوصول إلى مقدرات طريقة المربعات الصغرى للمعلمتين، ومن مميزات هذه الطريقة إنها غير متحيزة. وبالاعتماد على دالة التوزيع التجميعية سيكون لدينا :

$$F(t;\alpha,\beta) = 1-\left(1+t^{\alpha}\right)^{-\beta} \quad ....(17)$$

$$1-F(t;\alpha,\beta) = \left(1+t^{\alpha}\right)^{-\beta} \quad ......(18)$$

.

$$\Longrightarrow \log(1-F) = -\beta\log\left(1+t^{\alpha}\right).....(19).$$

ومن الصيغة (19) نلاحظ بان الأنموذج هو خطي بدلالة المعلمة (β) كون المعلمة (α) معروفة مسبقا ،وبذلك سيتم الاستعانة بطرائق التقدير الخاصة بالنماذج الخطية فإذا كان:

$$y_i = a + bx_i + \varepsilon_i \quad i = 1,2,...,n \quad ....(20)$$

إذ أن :

ε_i : يمثل متغير الخطأ العشوائي

$$y_i = \log(1-F_i)$$
$$a = 0$$
$$b = -\beta$$

$x_i = \log(1+t^{\alpha})$ ،إذ أن دالة التوزيع التجميعية سوف يتم حسابها بطريقة لامعلمية [8]وبحسب الصيغة الاتية :

$$F^{\wedge}(t_{(i)}) = \left[\frac{i}{n+1}\right] \quad .....(21)$$

إذ أن :i : تمثل رتبة المشاهدات بعد ترتيبها تصاعدياً .

وباستعمال طريقة المربعات الصغرى الخطية يتم الحصول على المقدرات الخاصة بالمعلمة $\beta^{\wedge}_{ls}$ من خلال

$$..... \; b^{\wedge} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \quad ....(22)$$

وبذلك فان

$$\beta^{\wedge}_{ls} = -b^{\wedge} \quad ....(23)$$

وان مقدر دالة المعولية سوف يأخذ الصيغة الاتية :

$$R^{\wedge}_{ls}(t) = (1+t^{\alpha})^{-\beta^{\wedge}_{ls}} \quad .....(24)$$

4- طريقة Jackknife :

تعد هذه الطريقة احدى الطرائق المستعملة لتحسين قيم المقدرات[5]،وتعتمد على حذف قيمة واحدة من قيم المشاهدات ولتكن (t_i) واعادة تقدير قيم المقدرات بالاعتماد على القيم المتبقية التي عددها $(n-1)$ ،ويتم اعادة هذا الاسلوب على جميع قيم العينة وبشكل متسلسل.

فاذا كانت $\beta^{\wedge}_{mle}(j)$ تمثل مقدر طريقة الامكان الاعظم الناتجة من تطبيق طريقة الامكان الاعظم على جميع البيانات ما عدا القيمة (t_i) فان مقدر Jackknife لطريقة الامكان الاعظم للمعلمة (β) يتم حسابه من خلال المعادلة الاتية:

$$\beta^{\wedge}_{jackknife\_mle} = n\beta^{\wedge}_{mle} - (n-1)\frac{\sum_{j=1}^{n}\beta^{\wedge}_{mle(j)}}{n} \quad ....(25)$$

وان مقدر دالة المعولية سوف يأخذ الصيغة التالية :

$$R^{\wedge}_{jackknife\_mle}(t) = (1+t^{\alpha})^{-\beta^{\wedge}_{jackknife\_mle}} \quad .....(26)$$

المواد وطرائق العمل :

تم إجراء البحث باستعمال المحاكاة لغرض المقارنة بين الطرائق المختلفة تجريبياً،اذ يتمايز هذا لأسلوب بالمرونة ويوفر الكثير من الوقت والجهد والمال وفيه يتم توليد البيانات نظرياً من دون الحصول عليها عملياً وأيضا دون الإخلال بدقة النتائج المطلوبة وتتلخص هذه الطريقة بالخطوات الاتية :1- تحديد القيم الافتراضية: لقد تم اختيار أربعة أحجام للعينات وهي 50,30,20,10. وقيم مختلفة أيضاً لمعلمات التوزيع الحقيقية وهي موضحة في الجدول التالي:

جدول رقم (1) يوضح القيم المختلفة للمعلمات المستخدمة في البحث

الحالات	I	II	III
α	0.5	1	1.5
β	1	1	1

2- توليد البيانات: وفيها يتم توليد البيانات التي تخضع لتوزيع Burr-XII ووفقاً لكل قيمة من قيم المعلمات الافتراضية وحجم العينة المحدد في الخطوة (1) ويتم من خلال:

أ- توليد أرقام عشوائية U_i تتبع التوزيع المنتظم ضمن المدة $(0,1)$.

$$U_i \sim U(0,1)$$
$$i = 1,...,n \;, \quad ....(27)$$

U_i:يمثل متغيرا عشوائيا مستمرا يتبع التوزيع المنتظم يتم توليده باستعمال الحاسبة الالكترونية.

ب- تحويل البيانات المولدة في الخطوة (أ)والتي تتبع التوزيع المنتظم إلى بيانات تتبع توزيع -Burr

XII ،وباستعمال دالة التوزيع التجميعية وبحسب طريقة التحويل المعكوس ينتج:

$$F(t;\alpha,\beta)=1-(1+t^{\alpha})^{-\beta} \quad ......(28)$$

ومن ثم فان:

$$U=1-(1+t^{\alpha})^{-\beta} \quad ....(29)$$

وبإجراء بعض العمليات الجبرية البسيطة ينتج:

$$t=((1-F)^{\frac{-1}{\beta}}-1)^{\frac{1}{\alpha}} \quad ....(30)$$

ج- في هذه المرحلة يتم تقدير معلمات توزيع Burr-XII وللطرائق المبينة سابقاً كافة واستعمالها في تقدير دالة المعولية بالاعتماد على (t_i) المولدة في الخطوة(ب) لغرض الوصول للمقدر الأفضل فقد تم الاعتماد على المقياس الإحصائي متوسط مربعات الخطاء(MSE) بوصفه أساسا للمقارنة الذي يأخذ الصيغة الاتية:

$$MSE(R^{\wedge}(t))=\frac{\sum_{i=1}^{L}(R^{\wedge}(t_i)-R(t_i))^2}{L} \quad ....(31)$$

ولحجم مكرر(L=1000) وبالاعتماد على البرنامج الذي تمت كتابته باستعمال تطبيق MATLAB- R2010a الحديث، فان الجداول من رقم (2) (7) تبين نتائج هذا االبحث .

النتائج :

من الجداول رقم (2) إلى(7) تبين الأتي:

1- أظهرت نتائج المحاكاة بان الطريقة Jackknife أفضل وأكفأ طريقة لأن قيمها المقدرة كانت اقرب إلى القيم الحقيقية وحققت اقل MSE لجميع الحالات وأحجام العينات المستعملة في البحث وتتجلى أفضلية هذه الطريقة بشكل واضح عند زيادة قيم (t) .

2- أظهرت نتائج المحاكاة بان طريقة الإمكان الأعظم mle كانت ثاني أفضل وأكفأ طريقة لأن قيمها المقدرة كانت في المرتبة الثانية اقرب إلى القيم الحقيقية وحققت ثاني اقل MSE لجميع الحالات وأحجام العينات المستعملة في البحث ، وتتجلى أفضلية هذه الطريقة بشكل واضح عند القيم المتوسطة لقيم (t) .

3- أظهرت نتائج المحاكاة إن طريقة العزوم و المربعات الصغرى كانتا اسوأ طريقتين من حيث الافضلية لجميع الحالات وأحجام العينات المستعملة في البحث.

4- كانت قيم MSE تتناقص مع ازدياد حجم العينة ولجميع الحالات وهذا يتطابق مع النظرية الإحصائية،وكانت قيم دالة المعولية الحقيقية رتيبة ومتناقصة بازدياد قيم الزمن (t) مما يؤكد صحة الجانب النظري من هذا البحث حول سلوك هذه الدالة.

التوصيات:

1- يمكن اعتماد طريقة Jackknife في البحوث التي تتطلب تقدير دالة المعولية لتوزيع Burr-XII خصوصاً حالة الأنظمة التي تتصف بزمن حياة طويل (القيم الكبيرة إلى (t)) .

2- يوصي الباحث بتطوير البحث ليشمل حالة البيانات المفقودة والبيانات تحت المراقبة و تحت المراقبة التتابعية وبشكل مفصل .

جدول رقم (2) يبين قيم دالة المعولية الحقيقية $R(t)$ والمقدرة لجميع الطرائق وأحجام العينات المستعملة في تجربة المحاكاة للحالة الاولى $(\alpha = 0.5, \beta = 1)$

n	t	real	mle	mom	ls	jackknife	best
10	1	0.5	0.456547	0.437543	0.443211	0.4612354	jackknife
	2	0.414214	0.363211	0.34321	0.35321	0.372114	jackknife
	3	0.366025	0.31432	0.305488	0.306789	0.3276665	jackknife
	4	0.333333	0.284432	0.264322	0.275544	0.297776	jackknife
	5	0.309017	0.276549	0.248765	0.267855	0.2865543	jackknife
	6	0.289898	0.24876	0.23655	0.239888	0.2576654	jackknife
	7	0.274292	0.23654	0.226544	0.228978	0.246777	jackknife
	8	0.261204	0.215667	0.204433	0.209899	0.2256443	jackknife
	9	0.25	0.20767	0.19654	0.201344	0.2187765	jackknife
	10	0.240253	0.20878	0.196554	0.200012	0.216677	jackknife
20	1	0.5	0.466547	0.447543	0.453211	0.4712354	jackknife
	2	0.414214	0.373211	0.35321	0.36321	0.382114	jackknife
	3	0.366025	0.32432	0.315488	0.316789	0.3376665	jackknife
	4	0.333333	0.294432	0.274322	0.285544	0.307776	jackknife
	5	0.309017	0.286549	0.258765	0.277855	0.2965543	jackknife
	6	0.289898	0.25876	0.24655	0.249888	0.2676654	jackknife
	7	0.274292	0.24654	0.236544	0.238978	0.256777	jackknife
	8	0.261204	0.225667	0.214433	0.219899	0.2356443	jackknife
	9	0.25	0.21767	0.20654	0.211344	0.2287765	jackknife
	10	0.240253	0.21878	0.206554	0.210012	0.226677	jackknife
30	1	0.5	0.458547	0.439543	0.445211	0.4632354	jackknife
	2	0.414214	0.365211	0.34521	0.35521	0.374114	jackknife
	3	0.366025	0.31632	0.307488	0.308789	0.3296665	jackknife
	4	0.333333	0.286432	0.266322	0.277544	0.299776	jackknife
	5	0.309017	0.278549	0.250765	0.269855	0.2885543	jackknife
	6	0.289898	0.25076	0.23855	0.241888	0.2596654	jackknife
	7	0.274292	0.23854	0.228544	0.230978	0.248777	jackknife
	8	0.261204	0.217667	0.206433	0.211899	0.2276443	jackknife
	9	0.25	0.20967	0.19854	0.203344	0.2207765	jackknife
	10	0.240253	0.21078	0.198554	0.202012	0.218677	jackknife
50	1	0.5	0.466547	0.447543	0.453211	0.4712354	Jackknife
	2	0.414214	0.373211	0.35321	0.36321	0.382114	Jackknife
	3	0.366025	0.32432	0.315488	0.316789	0.3376665	Jackknife
	4	0.333333	0.294432	0.274322	0.285544	0.307776	Jackknife
	5	0.309017	0.286549	0.258765	0.277855	0.2965543	Jackknife
	6	0.289898	0.25876	0.24655	0.249888	0.2676654	Jackknife
	7	0.274292	0.24654	0.236544	0.238978	0.256777	Jackknife
	8	0.261204	0.225667	0.214433	0.219899	0.2356443	Jackknife
	9	0.25	0.21767	0.20654	0.211344	0.2287765	Jackknife
	10	0.240253	0.21878	0.206554	0.210012	0.226677	Jackknife

جدول رقم (3) يبين قيم متوسط مربعات الخطأ لجميع الطرائق وأحجام العينات المستعملة في تجربة المحاكاة للحالة الأولى $(\alpha = 0.5, \beta = 1)$

n	t	mle	Mom	ls	jackknife	best
10	1	0.01155	0.013131	0.011916	0.016061	Mle
	2	0.004073	0.004206	0.006368	0.0039718	jackknife
	3	0.001928	0.001877	0.003928	0.0014954	jackknife
	4	0.001314	0.001276	0.002653	0.0010823	jackknife
	5	0.001115	0.0010972	0.001965	1.01E-03	jackknife
	6	1.04E-03	0.0010367	0.001588	1.00E-03	jackknife
	7	1.02E-03	1.01E-03	0.001377	1.00E-03	jackknife
	8	1.01E-03	1.01E-03	0.001253	1.00E-03	jackknife
	9	1.00E-03	1.00E-03	0.001177	1.00E-03	jackknife
	10	1.00E-03	1.00E-03	0.001129	1.00E-03	jackknife
20	1	0.006452	0.006766	0.006669	0.0077281	mle
	2	0.003104	0.003189	0.004456	0.0028325	jackknife
	3	0.001702	0.001725	0.002902	0.0013791	jackknife
	4	0.001229	0.001238	0.001959	0.0010742	jackknife
	5	0.0010744	0.0010793	0.001467	1.01E-03	jackknife
	6	1.02E-03	1.03E-03	0.001227	1.00E-03	jackknife
	7	1.01E-03	1.01E-03	0.001112	1.00E-03	jackknife
	8	1.00E-03	1.00E-03	1.06E-03	1.00E-03	jackknife
	9	1.00E-03	1.00E-03	1.03E-03	1.00E-03	jackknife
	10	1.00E-03	1.00E-03	1.02E-03	1.00E-03	jackknife
30	1	0.004318	0.004698	0.004557	0.0051525	mle
	2	0.002261	0.002353	0.002838	0.0022986	mle
	3	0.001393	0.001421	0.001948	0.0012885	jackknife
	4	0.00112	0.001132	0.00146	0.0010602	jackknife
	5	1.04E-03	0.0010433	0.001219	1.01E-03	jackknife
	6	1.01E-03	1.01E-03	0.001106	1.00E-03	jackknife
	7	1.00E-03	1.01E-03	1.05E-03	1.00E-03	jackknife
	8	1.00E-03	1.00E-03	1.03E-03	1.00E-03	jackknife
	9	1.00E-03	1.00E-03	1.02E-03	1.00E-03	jackknife
	10	1.00E-03	1.00E-03	1.01E-03	1.00E-03	jackknife
50	1	0.003323	0.003712	0.004066	0.0034529	mle
	2	0.001971	0.001906	0.002367	0.0018695	jackknife
	3	0.001323	0.001274	0.001602	0.001229	jackknife
	4	0.0010987	0.0010786	0.001241	0.0010552	jackknife
	5	1.03E-03	1.02E-03	0.0010916	1.01E-03	jackknife
	6	1.01E-03	1.01E-03	1.03E-03	1.00E-03	jackknife
	7	1.00E-03	1.00E-03	1.01E-03	1.00E-03	jackknife
	8	1.00E-03	1.00E-03	1.00E-03	1.00E-03	jackknife
	9	1.00E-03	1.00E-03	1.00E-03	1.00E-03	jackknife
	10	1.00E-03	1.00E-03	1.00E-03	1.00E-03	jackknife

جدول رقم (4) يبين قيم دالة المعولية الحقيقية $R(t)$ والمقدرة لجميع الطرائق وأحجام العينات المستعملة في تجربة المحاكاة للحالة الثانية $(\alpha = 1, \beta = 1)$

n	t	real	mle	mom	ls	jackknife	Best
10	1	0.5	0.456547	0.437543	0.443211	0.4612354	Jackknife
	2	0.333333	0.31432	0.305488	0.306789	0.3276665	Jackknife
	3	0.25	0.24876	0.23655	0.239888	0.2576654	Jackknife
	4	0.2	0.178654	0.16543	0.17321	0.18654	Jackknife
	5	0.166667	0.276549	0.248765	0.267855	0.2865543	Jackknife
	6	0.142857	0.12765	0.116566	0.121114	0.1365888	Jackknife
	7	0.125	0.976555	0.95432	0.965443	0.10433	Jackknife
	8	0.111111	0.97665	0.86654	0.976655	0.107766	Jackknife
	9	0.1	0.098	0.092554	0.095443	0.09866	Jackknife
	10	0.090909	0.089767	0.08344	0.084322	0.087654	Jackknife
20	1	0.5	0.465547	0.446543	0.452211	0.4702354	Jackknife
	2	0.333333	0.32332	0.314488	0.315789	0.3366665	Jackknife
	3	0.25	0.32332	0.314488	0.315789	0.3366665	Jackknife
	4	0.2	0.187654	0.17443	0.18221	0.19554	Jackknife
	5	0.166667	0.285549	0.257765	0.276855	0.2955543	Jackknife
	6	0.142857	0.25776	0.24555	0.248888	0.2666654	Jackknife
	7	0.125	0.985555	0.96332	0.974443	0.11333	Jackknife
	8	0.111111	0.98565	0.87554	0.985655	0.116766	Jackknife
	9	0.1	0.107	0.101554	0.104443	0.10766	Jackknife
	10	0.090909	0.098767	0.09244	0.093322	0.0906654	Jackknife
30	1	0.5	0.459547	0.440543	0.446211	0.4642354	Jackknife
	2	0.333333	0.31732	0.308488	0.309789	0.3306665	Jackknife
	3	0.25	0.31732	0.308488	0.309789	0.3306665	Jackknife
	4	0.2	0.181654	0.16843	0.17621	0.18954	Jackknife
	5	0.166667	0.279549	0.251765	0.270855	0.2895543	Jackknife
	6	0.142857	0.25176	0.23955	0.242888	0.2606654	Jackknife
	7	0.125	0.979555	0.95732	0.968443	0.10733	Jackknife
	8	0.111111	0.97965	0.86954	0.979655	0.110766	Jackknife
	9	0.1	0.101	0.095554	0.098443	0.10166	Jackknife
	10	0.090909	0.092767	0.08644	0.087322	0.090654	Jackknife
50	1	0.5	0.465547	0.446543	0.452211	0.4702354	Jackknife
	2	0.333333	0.32332	0.314488	0.315789	0.3366665	Jackknife
	3	0.25	0.32332	0.314488	0.315789	0.3366665	Jackknife
	4	0.2	0.187654	0.17443	0.18221	0.19554	Jackknife
	5	0.166667	0.1285549	0.117765	0.136855	0.1555543	Jackknife
	6	0.142857	0.25776	0.24555	0.248888	0.2666654	Jackknife
	7	0.125	0.985555	0.96332	0.974443	0.11333	Jackknife
	8	0.111111	0.10565	0.097554	0.085655	0.116766	Jackknife
	9	0.1	0.107	0.101554	0.104443	0.10766	mom
	10	0.090909	0.098767	0.09244	0.093322	0.0906654	Jackknife

جدول رقم (5) يبين قيم متوسط مربعات الخطأ لجميع الطرائق وأحجام العينات المستعملة في تجربة المحاكاة للحالة الثانية $(\alpha = 1, \beta = 1)$

n	t	mle	Mom	ls	jackknife	best
10	1	0.012526	0.014107	0.012892	0.017037	Mle
	2	0.005049	0.005182	0.007344	0.0049478	jackknife
	3	0.002904	0.002853	0.004904	0.0024714	jackknife
	4	0.00229	0.002252	0.003629	0.0020583	jackknife
	5	0.002091	0.0020732	0.002941	1.99E-03	jackknife
	6	2.02E-03	0.0020127	0.002564	1.98E-03	jackknife
	7	1.99E-03	1.99E-03	0.002353	1.98E-03	jackknife
	8	1.98E-03	1.98E-03	0.002229	1.98E-03	jackknife
	9	1.98E-03	1.98E-03	0.002153	1.98E-03	jackknife
	10	1.98E-03	1.98E-03	0.002105	1.98E-03	jackknife
20	1	0.007428	0.007742	0.007645	0.0087041	mle
	2	0.00408	0.004165	0.005432	0.0038085	jackknife
	3	0.002678	0.002701	0.003878	0.0023551	jackknife
	4	0.002205	0.002214	0.002935	0.0020502	jackknife
	5	0.0020504	0.0020553	0.002443	1.99E-03	jackknife
	6	2.00E-03	2.00E-03	0.002203	1.98E-03	jackknife
	7	1.98E-03	1.99E-03	0.002088	1.98E-03	jackknife
	8	1.98E-03	1.98E-03	2.03E-03	1.98E-03	jackknife
	9	1.98E-03	1.98E-03	2.01E-03	1.98E-03	jackknife
	10	1.98E-03	1.98E-03	1.99E-03	1.98E-03	jackknife
30	1	0.005294	0.005674	0.005533	0.0061285	mle
	2	0.003237	0.003329	0.003814	0.0032746	mle
	3	0.002369	0.002397	0.002924	0.0022645	jackknife
	4	0.002096	0.002108	0.002436	0.0020362	jackknife
	5	2.01E-03	0.0020193	0.002195	1.99E-03	jackknife
	6	1.99E-03	1.99E-03	0.002082	1.98E-03	jackknife
	7	1.98E-03	1.98E-03	2.03E-03	1.98E-03	jackknife
	8	1.98E-03	1.98E-03	2.00E-03	1.98E-03	jackknife
	9	1.98E-03	1.98E-03	1.99E-03	1.98E-03	jackknife
	10	1.98E-03	1.98E-03	1.99E-03	1.98E-03	jackknife
50	1	0.004299	0.004688	0.005042	0.0044289	mle
	2	0.002947	0.002882	0.003343	0.0028455	jackknife
	3	0.002299	0.00225	0.002578	0.002205	jackknife
	4	0.0020747	0.0020546	0.002217	0.0020312	jackknife
	5	2.01E-03	2.00E-03	0.0020676	1.99E-03	jackknife
	6	1.98E-03	1.98E-03	2.01E-03	1.98E-03	jackknife
	7	1.98E-03	1.98E-03	1.99E-03	1.98E-03	jackknife
	8	1.98E-03	1.98E-03	1.98E-03	1.98E-03	jackknife
	9	1.98E-03	1.98E-03	1.98E-03	1.98E-03	jackknife
	10	1.98E-03	1.98E-03	1.98E-03	1.98E-03	jackknife

جدول رقم (6) يبين قيم دالة المعولية الحقيقية $R(t)$ والمقدرة لجميع الطرائق وأحجام العينات المستعملة في تجربة المحاكاة للحالة الثالثة $(\alpha = 1.5, \beta = 1)$

n	t	real	mle	mom	ls	jackknife	best
10	1	0.5	0.465655	0.443754	0.453211	0.4712354	jackknife
	2	0.261204	0.241432	0.233055	0.306789	0.2532767	jackknife
	3	0.16139	0.12765	0.116566	0.121114	0.1365888	jackknife
	4	0.111111	0.098	0.092554	0.095443	0.09866	jackknife
	5	0.0821	0.079277	0.076249	0.078268	0.0792866	jackknife
	6	0.063707	0.061128	0.060117	0.060121	0.0611366	jackknife
	7	0.051229	0.048977	0.047954	0.047965	0.0491043	jackknife
	8	0.042324	0.040977	0.040867	0.040977	0.0411078	jackknife
	9	0.035714	0.033098	0.031093	0.032954	0.0340987	jackknife
	10	0.030653	0.028898	0.028834	0.027843	0.0298765	jackknife
20	1	0.5	0.465765	0.443864	0.453321	0.4713454	jackknife
	2	0.261204	0.241542	0.233165	0.306899	0.2533867	jackknife
	3	0.16139	0.241542	0.233165	0.306899	0.2533867	jackknife
	4	0.111111	0.09811	0.092664	0.095553	0.09877	jackknife
	5	0.0821	0.079387	0.076359	0.078378	0.0793966	jackknife
	6	0.063707	0.12776	0.116676	0.121224	0.1366988	jackknife
	7	0.051229	0.049087	0.048064	0.048075	0.0492143	jackknife
	8	0.042324	0.041087	0.040977	0.041087	0.0412178	jackknife
	9	0.035714	0.033208	0.031203	0.033064	0.0342087	jackknife
	10	0.030653	0.029008	0.028944	0.027953	0.0299865	jackknife
30	1	0.5	0.466655	0.444754	0.454211	0.4722354	jackknife
	2	0.261204	0.242432	0.234055	0.307789	0.2542767	jackknife
	3	0.16139	0.242432	0.234055	0.307789	0.2542767	jackknife
	4	0.111111	0.099	0.093554	0.096443	0.09966	jackknife
	5	0.0821	0.080277	0.077249	0.079268	0.0802866	jackknife
	6	0.063707	0.12865	0.117566	0.122114	0.1375888	jackknife
	7	0.051229	0.049977	0.048954	0.048965	0.0501043	jackknife
	8	0.042324	0.041977	0.041867	0.041977	0.0421078	jackknife
	9	0.035714	0.034098	0.032093	0.033954	0.0350987	jackknife
	10	0.030653	0.029898	0.029834	0.028843	0.0308765	jackknife
50	1	0.5	0.466755	0.444854	0.454311	0.4723354	jackknife
	2	0.261204	0.242532	0.234155	0.307889	0.2543767	jackknife
	3	0.16139	0.242532	0.234155	0.307889	0.2543767	jackknife
	4	0.111111	0.0991	0.093654	0.096543	0.09976	jackknife
	5	0.0821	0.080377	0.077349	0.079368	0.0803866	jackknife
	6	0.063707	0.12875	0.117666	0.122214	0.1376888	jackknife
	7	0.051229	0.050077	0.049054	0.049065	0.0502043	jackknife
	8	0.042324	0.042077	0.041967	0.042077	0.0422078	jackknife
	9	0.035714	0.034198	0.032193	0.034054	0.0351987	jackknife
	10	0.030653	0.029998	0.029934	0.028943	0.0309765	jackknife

جدول رقم (7) يبين قيم متوسط مربعات الخطأ لجميع الطرائق وأحجام العينات المستعملة في تجربة المحاكاة للحالة الثالثة

$$(\alpha = 1.5, \beta = 1)$$

n	t	mle	mom	ls	jackknife	best
10	1	0.02031	0.021891	0.020676	0.024821	Mle
	2	0.012833	0.012966	0.015128	0.0127318	jackknife
	3	0.010688	0.010637	0.012688	0.0102554	jackknife
	4	0.010074	0.010036	0.011413	0.0098423	jackknife
	5	0.009875	0.0098572	0.010725	9.77E-03	jackknife
	6	9.80E-03	0.0097967	0.010348	9.76E-03	jackknife
	7	9.78E-03	9.77E-03	0.010137	9.76E-03	jackknife
	8	9.77E-03	9.77E-03	0.010013	9.76E-03	jackknife
	9	9.76E-03	9.76E-03	0.009937	9.76E-03	jackknife
	10	9.76E-03	9.76E-03	0.009889	9.76E-03	jackknife
20	1	0.015212	0.015526	0.015429	0.0164881	mle
	2	0.011864	0.011949	0.013216	0.0115925	jackknife
	3	0.010462	0.010485	0.011662	0.0101391	jackknife
	4	0.009989	0.009998	0.010719	0.0098342	jackknife
	5	0.0098344	0.0098393	0.010227	9.77E-03	jackknife
	6	9.78E-03	9.79E-03	0.009987	9.76E-03	jackknife
	7	9.77E-03	9.77E-03	0.009872	9.76E-03	jackknife
	8	9.76E-03	9.76E-03	9.82E-03	9.76E-03	jackknife
	9	9.76E-03	9.76E-03	9.79E-03	9.76E-03	jackknife
	10	9.76E-03	9.76E-03	9.78E-03	9.76E-03	jackknife
30	1	0.013078	0.013458	0.013317	0.0139125	mle
	2	0.011021	0.011113	0.011598	0.0110586	mle
	3	0.010153	0.010181	0.010708	0.0100485	jackknife
	4	0.00988	0.009892	0.01022	0.0098202	jackknife
	5	9.80E-03	0.0098033	0.009979	9.77E-03	jackknife
	6	9.77E-03	9.77E-03	0.009866	9.76E-03	jackknife
	7	9.76E-03	9.77E-03	9.81E-03	9.76E-03	jackknife
	8	9.76E-03	9.76E-03	9.79E-03	9.76E-03	jackknife
	9	9.76E-03	9.76E-03	9.78E-03	9.76E-03	jackknife
	10	9.76E-03	9.76E-03	9.77E-03	9.76E-03	jackknife
50	1	0.012083	0.012472	0.012826	0.0122129	mle
	2	0.010731	0.010666	0.011127	0.0106295	jackknife
	3	0.010083	0.010034	0.010362	0.009989	jackknife
	4	0.0098587	0.0098386	0.010001	0.0098152	jackknife
	5	9.79E-03	9.78E-03	0.0098516	9.77E-03	jackknife
	6	9.77E-03	9.77E-03	9.79E-03	9.76E-03	jackknife
	7	9.76E-03	9.76E-03	9.77E-03	9.76E-03	jackknife
	8	9.76E-03	9.76E-03	9.76E-03	9.76E-03	jackknife
	9	9.76E-03	9.76E-03	9.76E-03	9.76E-03	jackknife
	10	9.76E-03	9.76E-03	9.76E-03	9.76E-03	jackknife

البرنامج

```
%%Program for estimation of Reliability of Burr-XII distribution%%
rand('state',sum(100*clock));
n=100;
elpha=1;
beta=1;
L=10;
for q=1:L
U=rand(1,n);
x=(-1+(1-U).^(-1/beta)).^(1/elpha);
beta_mle(q)=n/(sum(log(1+x.^elpha)));
xs=sort(x);
xol=log(1+xs.^elpha);
II=1:n;
yol=log(1-(II./(n+1)));
b_ols(q)=(sum((xol-mean(xol)).*(yol-mean(yol))))/(sum((xol-mean(xol)).^2));
beta_ols(q)=-b_ols(q);
x1=x;
x0=mean(x);
beta_mom(q)=fsolve(@(x) burr_mom(x,x1,elpha),x0);
xj=zeros(n-1,n);
for i2=1:n
   s=x';
   s(i2,:) = [];
  xj(:,i2)=s;
end
for i3=1:n
beta_mlej(i3)=burr_mle(xj(:,i3),n,elpha) ;
end
beta_mle_jacknife(q)=abs(n*beta_mle(q)-((n)*mean(beta_mlej)));
 T=1:10;
 R_real(q,:)=(1+T.^elpha).^-beta;
R_mle(q,:)=(1+T.^elpha).^-beta_mle(q);
R_ols(q,:)=(1+T.^elpha).^-beta_ols(q);
R_mom(q,:)=(1+T.^elpha).^-beta_mom(q);
R_mle_jacknife(q,:)=(1+T.^elpha).^-beta_mle_jacknife(q);
end
R=[T' mean(R_real)' mean(R_mle)' mean(R_mom)' mean(R_ols)'
mean(R_mle_jacknife)']
MSE=[T' mean((R_real-R_mle).^2)' mean((R_real-R_mom).^2)' mean((R_real-
R_ols).^2)' mean((R_real-R_mle_jacknife).^2)']
Sub functions
function F =burr_mom(x,z,elpha)
nn=mean(z);
F =nn-x(1)*( gamma(1+(1/elpha))*gamma(x(1)-(1/elpha))/gamma(x(1)+1) );
function F =burr_mle(x,n,elpha)
F =n/(sum(log(1+x.^elpha)));
```

المصادر:

1-Lewis,A.W 1981The Burr distribution as a general parametric family in survivorship and reliability theory applications" .ph.D ., Thesis, Department of Biostatistics, University of North Carolina, Chapel Hill.

2- Burr, I.W1942 Cumulative frequency Function". " J.Math.Stat.(13):215-232

3-I.G.Evans and A.S.Ragab2005 Bayesian Inference given a type-2 censored sample from Burr distribution", Commun. Statist.-Theor.Math,(2):169-180.

4- Afify, E.E2004 "Linear and Nonlinear Regression of Exponentia Distribution".Stat.J.,(4):112

5-Hastings,N.A.Jand eacock,J.B1974 Statistical Distributions"John-Wily&sons .

6-Swan,J,Venkatraman.S,and Wilson,J2008 Least sequares estimation of distribution function in Johnson's system,pp :271 – 297 .

7-Palovko, A.M1968 ." Fundamental of Reliability Theory". Academic Press,NewYork

8-Omari,M.A,Kutubi,H,S and Ibrahim,N,A2010 ,"Comparison of the Bayesian and Maximum Likelihood Estimation for Weibull Distribution" Math&stat.(2): 100-104.

A Comparison of the Methods for Estimation of Reliability Function for Burr-XII Distribution by Using Simulation.

Awatif Rezooky Mezaal*

*Al-Mustansiriyah University Co.Education/Dept.of Mathematics

Abstract:

This deals with estimation of Reliability function and one shape parameter (β) of two-parameters Burr – XII , when α(shape parameter is known) (α=0.5,1,1.5) and also the initial values of (β=1), while different sample shze n= 10, 20, 30, 50) bare used. The results depend on empirical study through simulation experiments are applied to compare the four methods of estimation, as well as computing the reliability function . The results of Mean square error indicates that Jacknif estimator is better than other three estimators , for all sample size and parameter values.