حول النقاط الدورية والدوال الفوضوية

سليم حسن الكتبي* خولة علي مصطفى**

تاريخ قبول النشر ٢٠/٨/٢٠٠٤

الخلاصة

تناولنا طبيعة النقاط الدورية تحت تاثير الدالة الفوضوية ، الدوال المترافقة لدوال فوضوية والشروط الكافية لان تكون قصر الدوال شديدة الفوضوية.

المقدمة

اذا كانت $f:X\to X$ دالة يقال ان النقطة $x\in X$ دورية تحت تاثير f اذا كان هناك $n\in N$ بحيث $f^n(x)=x$ ونرمز لمجموعة النقاط الدوية في X تحت تاثير الدالة f بـ $per(f)$ و يقال انها نقطة دورية بعد حين اذا لم تكن نقطة دورية ولكن هناك نقطة في مدارها تكون دورية أي ان هناك $m>0$ بحيث $f^m(x)$ نقطة دورية ، ويقال ان f تتعدى تبولوجيا في X اذا كان لكل $U,V\subset X$ مفتوحتين هناك $n\in N$ بحيث $f^n(U)\cap V\neq\Phi$ وفي حالة X فضاء مرصوص فان f تتعدى تبولوجيا في X يعني ان هناك $x\in X$ بحيث $\overline{xN}=X$ وعندما تكون لكل $x,y\in X$ و $\delta>0$ بحيث $d(x,y)<\delta$ هناك $n\in N$ بحيث $d(f^n(x),f^n(y))>\epsilon$ عندها يقال ان f تمتلك حساسية معتمدة لشروط ابتدائية في مجالها . واذا كانت $x\in X$ و $\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|(f^n)'(x)\right|$ معرفة عندها يقال ان f تمتلك اسية لابنوف عند النقطة x وفي حالة λ لاتعتمد على x يقال ان f تمتلك اسية لابنوف . واذا كانت الدالة تمتلك حساسية معتمدة لشروط ابتدائية في مجالها او تمتلك اسية لابنوف موجبة للنقاط غير الدورية بعد حين عندها يقال ان f دالة فوضوية ويقال ان الدالة f شديدة الفوضوية اذا كانت فوضوية وتتعدى تبولوجيا في مجالها ومجموعة النقاط الدورية في مجالها تكثف المجال .

في هذا البحث نعمل على انظمة ديناميكية مفرقة عن طريق تكرار الدوال على مجموعات مرصوصة مغلقة .

١-النقاط الدورية:

اذا كانت $f:X\to X$ دالة و $x\in X$ نقطة دورية بدورة n يقال ان x نقطة دورية جاذبة اذا كانت $\left|(f^n)'(x)\right|<1$ اما النقطة الدورية الطاردة فتكون معرفة كما ياتي :

١-١ تعريف :لتكن $f:X\to X$ دالة و $x\in X$ نقطة دورية بدورة n يقال ان x نقطة دورية طاردة اذا كانت $\left|(f^n)'(x)\right|>1$.

في القضية القادمة نثبت ان النقطة الدورية تحت تاثير دالة تمتلك اسية لابنوف موجبة تكون نقطة دورية طاردة .

١-٢ قضية :

لتكن $f:X\to X$ دالة و f تمتلك اسية لابنوف موجبة λ للنقاط غير الدورية بعد حين فاذا كانت $x\in X$ و x دورية بدورة n فان x دورية طاردة.

البرهان :

لتكن $x\in X$ و x ليست دورية بعد حين اذن x اما دورية بدوره n او غير دورية بما ان f تمتلك اسية لابنوف موجبة λ اذن هناك $n\in N$ بحيث

$$\lambda=\lim\frac{1}{n}\ln\left|(f^n)'(x)\right|>0$$

اذن $\frac{1}{n}\ln\left|(f^n)'(x)\right|>0$

وبالتالي فان $\ln\left|(f^n)'(x)\right|>0$

وهذا يؤدي الى $\left|(f^n)'(x)\right|>1$

*استاذ مساعد جامعة تكريت – كلية التربية – قسم الرياضيات .

** مدرس مساعد

وهذا يعني ان x نقطة دورية طاردة *

٣-١ ملاحظة .

اذا كانت $f:X\to X$ دالة تمتلك حساسية معتمدة لشروط ابتدائية فان جميع النقاط الدورية في X تحت تاثير تكرار f هي نقاط دورية طاردة [GU] .

وبالتالي فان مجموعة النقاط الدورية تحت تاثير دالة فوضوية تكون نقاط دورية طاردة.

٢-الدوال المترافقة:

يقال ان الدالتان $f:X\to X$ و $g:Y\to Y$ انهما دالتان مترافقتان اذا كانت هناك هوميومورفزم $h:X\to Y$ بحيث $hof=goh$ وتكتب $f\approx_h g$ هنا نثبت انه اذا كانت f دالة شديدة الفوضوية ومترافقة مع g فان g دالة شديدة الفوضوية وذلك من خلال القضية والملاحظات الاتية ونبدأ من الممهدة الاتية:

٢-١ممهدة: اذا كانت $f\approx_h g$ فان $f^n\approx_h g^n$

البرهان : [GU].

٢-٢ ممهدة: لتكن $f:X\to X$ و $g:Y\to Y$ دالتان مترافقتان فان العبارتين الاتيتين صحيحة:

١- اذا كانت f تتعدى تبولوجيافي X فان g تتعدى تبولوجيا في Y

٢- اذا كانت $\overline{per(f)}=X$ فان $\overline{per(g)}=Y$

البرهان :[Gu].

٢-٣ قضية

لتكن $f:X\to X$ و $g:Y\to Y$ دالتين و $h:X\to Y$ هوميومورفزم و $f\approx_h g$ و f تمتلك حساسية معتمدة لشروط ابتدائية على X فان g تمتلك حساسية معتمدة لشروط ابتدائية على Y .

البرهان :

نفرض ان g لا تمتلك حساسية معتمدة لشروط ابتدائية، اذن لكل $\epsilon>0$ و $n\in N$ هناك $\delta_1>0$ بحيث اذا كانت $y_1,y_2\in Y$ فان $d(y_1,y_2)<\delta_1$ فان $d(g^n(y_1),g^n(y_2))<\epsilon_1$ بما ان h هوميومورفزم فان هناك $x_1,x_2\in X$ بحيث $h(x_1)=y_1$ و $h(x_2)=y_2$ و ان $d(x_1,x_2)<\delta$

اذن $d(g^n(h(x_1)),g^n(h(x_2)))<\epsilon_1$

بما ان $f\approx_h g$ فان $f^n\approx_h g^n$ حسب الممهدة (٢-١)

اذن $d(h(f^n(x_1)),h(f^n(x_2)))<\epsilon_1$

وبما ان h^{-1} هوميومورفزم فان $d(f^n(x_1),f^n(x_2))<\epsilon$

أي ان f لا تمتلك حساسية معتمدة لشروط ابتدائية على X اذن g يجب ان تمتلك حساسية معتمدة لشروط ابتدائية على Y*

٢-٣ قضية

لتكن $f:X\to X$ و $g:Y\to Y$ دالتان و $h:X\to Y$ هوميومورفزم و $f\approx_h g$ وكانت f تمتلك اسية لابنوف فان g تمتلك اسية لابنوف .

البرهان :

نفرض ان g لا تمتلك اسية لابنوف اذن هناك $y\in Y$ بحيث

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|(g^n)'(y)\right|$$

غير موجودة وهذا يعني ان $|(g^n)'(y)|=0$ بما ان h هوميومورفزم اذن هناك $x\in X$ بحيث $h(x)=y$

اذن $(g^n)'(h(x))=0$ وهذا يؤدي الى $(g^noh)'(x)/h'(x)=0$

اذن $(g^noh)'(x)=0$ وحسب الممهدة (٢-١) فان $hof^n=g^noh$ وبالتالي فان $(hof^n)'(x)=0$ وهذا يؤدي الى $h'(f^n(x)).(f^n)'(x)=0$

اذن اما $(f^n)'(x)=0$ أي ان f لاتمتلك اسية لابنوف .

او $h'(f^n(x))=0$ وبالتالي فان $h(f^n(x))=c$ ،أي ان $f^n(x)=h^{-1}(c)$ وبالتالي فان $(f^n)'(x)=0$ ،أي ان f لا تمتلك اسية لابنوف .

أي ان g يجب ان تمتلك اسية لابنوف *

٢-٤ قضية

لتكن $f:X\to X$ و $g:Y\to Y$ دالتان و $h:X\to Y$ هوميومورفزم بحيث $f\approx_h g$ و f تمتلك اسية لابنوف موجبة فان g تمتلك اسية لابنوف موجبة .

البرهان :

في القضية السابقة اثبتنا انه اذا كانت f تمتلك اسية لابنوف فان g تمتلك اسية لابنوف بقي ان نبرهن ان اسية لابنوف لـ g موجبة .

نفرض ان اسية لابنوف لـ g ليست موجبة اي ان لاي $y\in Y$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|(g^n)'(y)\right|\le 0$$

وبالتالي فان $\left|(g^n)'(y)\right|\le 1$

بما ان h هوميومورفزم فان هناك $x\in X$ بحيث $h(x)=y$ وبالتالي فان

$$\left|(g^n)'(h(x))\right|\le 1$$

وبالتالي فان

$$\left|(g^noh)'(x)/h'(x)\right|\le 1$$

$$\left|\left(g^{n} oh\right)'(x)\right| \le |h'(x)|$$

وحسب الممهدة (٢-١) فان $hof^n=g^noh$ اذن

$$\left|\left(hof^{n}\right)'(x)\right| \le |h'(x)|$$

اذن

$$\left|\left(hof^{n}\right)(x)\right| \le |h(x)|$$

بما ان h هوميومورفزم اذن

$$\left|\left(f^{n}\right)(x)\right| \le |x|$$

اذن

$$\left|\left(f^{n}\right)'(x)\right| \le 1$$

أي ان وبالتالي فان

$$\frac{1}{n}\ln\left|\left(f^{n}\right)'(x)\right| \le 0$$

اذن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|\left(f^{n}\right)'(x)\right| \le 0$$

أي ان f تمتلك اسية لابنوف ليست موجبة وبالتالي فان g يجب ان تمتلك اسية لابنوف موجبة *

اذن ومن القضايا السابقة نستنتج ان الدالة المترافقة مع دالة فوضوية تكون دالة فوضوية. وان الدوال المترافقة مع دوال شديدة الفوضوية تكون دوال شديدة الفوضوية.

٣- قصر الدوال

هنا نثبت ان قصر الدالة الفوضوية على مجموعة مغلقة لامتغيرة تكون دالة فوضوية وان قصر الدالة شديدة الفوضوية على مجموعة مغلقة لامتغيرة تكون الدالة متعدية تبولوجياً فيها وتحتوي في الاقل نقطة دورية واحدة تكون دالة شديدة الفوضوية وذلك من خلال القضايا و الملاحظات الاتية

٣-١ قضية

لتكن $f:X\to X$ دالة تمتلك حساسية معتمدة لشروط ابتدائية على X و $\Lambda\subset X$ مجموعة مغلقة لا متغيرة فان $g=f|_\Lambda$ تمتلك حساسية معتمدة لشروط ابتدائية على Λ.

البرهان :

ليكن $x,y\in\Lambda$ و $d(x,y)<\delta$ ، اذن $x,y\in X$ بما ان f تمتلك حساسية معتمدة لشروط ابتدائية على X فان هناك $n\in N$ و $C>0$ بحيث $d(f^n(x),f^n(y))>C$ وبالتالي فان $d(g^n(x),g^n(y))>C$.

اذن $g=f|_\Lambda$ تمتلك حساسية معتمدة لشروط ابتدائية على Λ *

٣-٢ ملاحظات:

١- قصر الدالة التي تمتلك اسية لابنوف موجبة على مجموعة مغلقة لامتغيرة تكون دالة تمتلك اسية لابنوف موجبة .

٢- اذا كانت $f:X\to X$ دالة و $\Lambda\subset X$ لامتغيرة بحيث f متعدية تبولوجيا في Λ فان Λ مجموعة مغلقة .

مما سبق نستنتج ان قصر الدالة الفوضوية على مجموعة مغلقة لامتغيرة تكون دالة فوضوية .

٣-٣ قضية

اذا كانت $f:X\to X$ دالة وكانت $\overline{per(f)} = X$. وكانت $\Lambda\subset X$ مغلقة لا متغيرة تحت تأثير تكرار f فان اما $\overline{per(f|_\Lambda)} = \Lambda$ او $per(f|_\Lambda)=\varphi$.

البرهان :

نفرض مجموعة مفتوحة في الفضاء Λ ، اذن هناك $V\subset X$ مفتوحة بحيث $G=\Lambda\cap V$ ، بما ان $\phi per(f)=\cap G$ وهذ يؤدي الى ان

$(\Lambda \cap V)\, per(f)=\phi$

اذن اما V وهذا يناقض كون per(f) مجموعة كثيفة .

او $per(f|_\Lambda)=\Lambda\cap per(f)=\phi$ لان Λ لامتغيرة وهذا يناقض فرضيتنا ، اذن $\Lambda= per(f|_\Lambda)$ *

وبالتالي تكون قصر الدالة شديدة الفوضوية على مجموعة لامتغيرة تكون الدالة متعدية تبولوجيا فيها وتحتوي في الاقل نقطة دورية واحدة تكون دالة شديدة الفوضوية .

المصادر :

[1] Devany,R.L.(1989) An Introduction to Chaotic Dynamical System ,Second Edition ,Addition-Wesely Mulo Park, California .

[2] Gulick, D.(1992) Encounter with Chaos, McGraw. Hill. Inc.

[3] Weal Broker ,H. and Zertuche, F.(1998) Discrete Chaos, to be Published in Journal of Physics A: Mathematical and General .

On Periodic point and Chaotic Functions

Kaula ali Mustafa Saleem Hasan AL – Katby

ABSTRACT

In this paper we studied the nature of periodic points under chaotic function , the strongly chaotic and the sufficient condition for the restriction for the restriction of strongly chaotic functions to be strongly chaotic .